ISSN 1671-024X
CN 12-1341/TS

天津工業大學学报

JOURNAL OF TIANJIN POLYTECHNIC UNIVERSITY

中文核心期刊 · 中国科技核心期刊 · RSSEC核心期刊

第36卷 Vol.36
2017 增刊

TIANJIN GONGYE DAXUE XUEBAO

第36卷 增刊
2017年9月

天 津 工 业 大 学 学 报
JOURNAL OF TIANJIN POLYTECHNIC UNIVERSITY

Vol.36 Suppl.
September 2017

微课程《拉格朗日乘数法》教学设计

张 霞，刘 明
（天津工业大学 理学院，天津 300387）

摘 要：微课是以视频为主要载体记录教师在课堂教学过程中围绕某个知识点或教学环节而开展的教与学活动全过程.它以教学时间短、教学内容少、资源容量少为主要特点，但必须要有精致的教学设计.本文给出了微课程《拉格朗日乘数法》的教学设计，具体地我们采用"诱思探究式"教学方法，即从现实生活中的例子——蜂窝问题来引入拉格朗日乘数法，反过来，又利用拉格朗日乘数法给出了蜂窝问题的详细解答.这种方法能够较好地激发学生的学习兴趣，强化学生参与意识，提高课堂教学效率.

关键词：微课；拉格朗日乘数法；蜂窝问题；教学设计
中图分类号：O172.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-024X(2017)增刊-0087-03

从现实生活中的例子——蜂窝问题来引入拉格朗日乘数法是我们本节课的特色，为此我们在背景引入时，首先通过视频资料让大家来直观地感受蜂窝的奇特结构，其次进一步通过科学家研究蜂窝结构的小故事来引入拉格朗日乘数法.

1 教学目标、教学内容及重点难点分析

教学目标：理解拉格朗日乘数法，学会用拉格朗日乘数法在实际问题中求解条件极值问题.

教学内容：条件极值，拉格朗日乘数法，蜂窝问题.

基本要求：理解拉格朗日乘数法，掌握用拉格朗日乘数法求条件极值的方法.

较高要求：用拉格朗日乘数法来解决实际问题.

本节课的重点是用拉格朗日乘数法求条件极值，要求学生熟练掌握；为此我们在讲解完拉格朗日乘数法后总结了用此方法来求解条件极值的三个步骤.从蜂窝问题来引入拉格朗日乘数法是我们本节课的特色，但由于蜂窝的奇特复杂结构，利用拉格朗日乘数法来求解蜂窝问题却是本节课的难点，为此我们分为五步并结合图形来进行讲解.

2 教学方法和过程

2.1 教学方法

我们采用"诱思探究式"的教学方法，即首先从现实生活中的例子——蜂窝问题来引入拉格朗日乘数法，然后重点讲解拉格朗日乘数法原理，接下来又利用拉格朗日乘数法给出了蜂窝问题的详细解答，最后我们对本部分内容进行了延伸拓展.这种方法，能够在一开始问题引入的时候就能够吸引学生的注意，较好地激发学生的学习兴趣，强化学生的参与意识，大大地提高课堂的学习效率.

2.2 教学过程

我们从问题引入、拉格朗日乘数法、应用举例——蜂窝问题、延伸拓展四个方面来进行讲解，首先来看问题是怎样引入的.

2.2.1 问题引入

伟大的生物学家达尔文曾对蜂窝这样评价："蜂窝的精巧构造十分符合需要，如果一个人看到蜂窝而不加倍赞扬，那他一定是个糊涂虫."让我们先来通过一组视频来看看蜂窝结构在我们实际生活中的例子那么，真正的蜂窝究竟是怎样的结构呢?

从表面上看，许许多多正六边形的洞完全铺满了一个平面区域，每一个洞是一个六面柱的窝的入口，俩个洞之间只隔着一堵蜡制的墙，令人惊讶的是，这些六面柱的底竟不是平的，也不是圆的，而是尖的，这个底是由三个完全相同的菱形（钝角 109°28′，锐角 70°32′），更令人叫绝的是，世界上所有蜜蜂的蜂窝都是按照这个统一的角度和模式进行建造的.

蜂窝的结构曾引起科学家们极大的兴趣：①早在

收稿日期：2017-06-16
基金项目：天津市普通高等学校本科教学质量与教学改革研究计划重点课题项目(D02-0701)；国家自然科学基金资助项目(11301380)；天津工业大学"十三五"专业建设项目
通信作者：张 霞(1980—)，女，副教授. E-mail：zhangxia@tjpu.edu.cn

公元前 300 年前后，古希腊数学家帕波斯就认为六面柱的蜂窝是最经济的结构. ②17 世纪初期，著名的天文学家开普勒断言蜂窝的角度应该和菱形十二面体的角度一样. ③18 世纪初期，法国天文学家马拉尔经过观测研究得出菱形的角度，法国昆虫学家列俄木猜想用这样的角度来建造蜂窝，在相同体积下最节省材料. ④1712 年，数学家可尼希证实了昆虫学家的猜想，但计算的结果和实际测量有两分之差，那一时期，大家普遍认为蜜蜂解决这一复杂的问题只有两分之差，是完全可以允许的，可尼希甚至还说蜜蜂解决了超出古典几何学范围而属于牛顿–莱布尼茨微积分的问题. 但这个问题还没结束. ⑤1743 年，麦克劳林重新研究蜂窝的形状，得到更为惊人的结果，他完全用初等数学的方法证明菱形的角度和实际测量一样，这 2′的误差，不是蜜蜂不准，而是数学家可尼希算错了，他为会么会算错，原来他用的对数表印错了.

后来又有很多人给出蜂窝问题很多种解答，但唯有微积分中的方法较为简便，今天我们就用微积分中的方法——拉格朗日乘数法给出蜂窝问题一种解答.

为此，我们介绍拉格朗日乘数法.

2.2.2 拉格朗日乘数法

在实际问题中我们遇到这样的问题：求目标函数 $Z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 的极值，例如：①求周长为 a 面积最大的矩形；②蜂窝问题；③经济中的优化问题，这样的极值问题我们统称为条件极值问题.

求解极值问题一般有两种方法：第一种方法：有时可由从附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出显函数 $x=x(y)$ 或 $y=y(x)$，将其代入目标函数 $f(x,y)$ 变成一元函数，从而问题就化成了求一元函数的极值问题，但这种方法具有局限性：①我们可能解不出显函数，因为隐函数确实普遍存在；②求解过程可能很繁琐，下面一种方法是我们所介绍的求解极值的一般方法——拉格朗日乘数法.

设在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 之下求函数 $z=f(x,y)$ 的极值. 当满足附加条件的点 (x_0,y_0) 是函数 $f(x,y)$ 的条件极值点，且在该点函数 $\varphi(x,y)$ 满足隐函数存在条件时，由方程 $\varphi(x,y)=0$ 决定隐函数 $y=g(y)$，于是点 x_0 就是一元函数 $z=f(x,g(x))$ 的极值点，有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y g'(x)=0.$$

代入 $g'(x_0)=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，就有

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0$$

（以下 f_x、f_y、φ_x、φ_y 均表示相应偏导数在点 (x_0,y_0) 的值.）

即 $f_x\varphi_y-f_y\varphi_x=0$，亦即 $(f_x,f_y)(\varphi_y,-\varphi_x)=0$.

可见向量 (f_x,f_y) 与向量 $(\varphi_y,-\varphi_x)$ 正交. 注意到量 (φ_x,φ_y) 也与向量 $(\varphi_y,-\varphi_x)$ 正交，即得向量 $(f_x$ 与向量 (φ_x,φ_y) 线性相关，即存在实数 λ，使

$$(f_x,f_y)+\lambda(\varphi_x,\varphi_y)=0$$

亦即

$$\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \end{cases}$$

这意味着：对于函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y$ 点 (x_0,y_0,λ_0) 处恰好满足：

$$\begin{cases} L_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ L_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ L_\lambda'=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

即上式即为函数 $L(x,y,\lambda)$ 在 (x_0,y_0,λ_0) 点取得极值满足的必要条件，由此产出了一个重要思想：通过进辅助函数 $L(x,y,\lambda)$，把条件极值问题转化为关于个函数的无条件极值问题. 应该指出的是辅助函 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 是由数学家拉格朗日先引进的，故称函数 $L(x,y,\lambda)$ 为拉格朗日函数，参 λ 为拉格朗日乘子. 上述求解的过程也称为拉格朗乘数法.

下面我们总结一下利用拉格朗日乘数法求解题的一般步骤：

（1）构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

（2）解方程组

$$\begin{cases} L_x'(x,y,\lambda)=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ L_y'(x,y,\lambda)=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

求 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点坐标 (x_0,y_0,λ_0)

（3）判断 $Z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值的类型，在实际问题中可根据问题本身的性质来判定.

2.2.3 应用举例——求解蜂窝问题

蜂窝问题：在相同的体积下，一个六柱面由怎样三个全等的菱形作底其表面积才能最小？

首先我们来分析这样的一个问题，一它是个六面柱，二它要求体积不发生变化，三要求表面积最小. 在这样的情况下让我们来刻画这三个全等的菱形，我们知道一旦菱形一个角的度数确定了，那么这样一个菱形就确定了，因此问题转化为求解菱形的角度（如图 1 所示）.

下面进行求解：

解：设正六边形的边长为 $2a$，则它的对角线长为

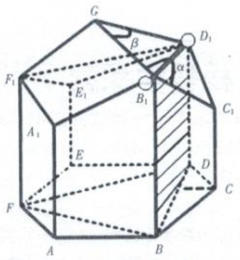

图 1　三个全等的菱形

$2\sqrt{3}\,a$，因作底的菱形全等且菱形的对角线 B_1D_1 平行于底面，故菱形的对角线长 $B_1D_1=2\sqrt{3}\,a$，在这里，我们需要说明的是，由于作底的三个菱形全等，平面 $B_1D_1F_1$ 平行于底面，平面 $A_1C_1E_1$ 平行于底面，从而由 G 向底面作垂线 GH，则柱体中心柱 $GH\perp$ 平面 $B_1D_1F_1$，$GH\perp$ 平面 $A_1C_1F_1$.

（1）寻求附加条件. 设 G 到平面 $B_1D_1F_1$ 的距离为 x，菱形的另外一条对角线长 $GC_1=2y$，则 GC_1 在柱体中心轴上的投影为 $2x$，在平面 $A_1C_1E_1$ 的投影为 $2a$，在直角三角形 GOC_1 中，由勾股定理得：$(2x)^2+(2a)^2=(2y)^2$，即 $x^2+a^2=y^2$. 这样就找到了 x 和 y 之间的关系，即为附加条件.

（2）寻找目标函数. 将侧棱 AA_1，CC_1，EE_1 延长，与平面 $B_1D_1F_1$ 分别相交于 A_0，C_0，E_0，这相当于用一个平面沿着平面 $B_1D_1F_1$ 去切六面柱，则交 AA_1，CC_1，EE_1 的延长线为 A_0，C_0，E_0. 将四面体 $G\text{-}B_1D_1F_1$ 切掉后我们得到一个棱柱，而这个六棱柱体积就和原来蜂窝的体积相等，但面积却发生了变化. 六棱柱比蜂窝增加一个正六边形的面积和六个直角三角形的面积，减少了三个菱形的面积. 通过计算面积的变化，蜂窝的表面比六棱柱的面积节省了 $6\sqrt{3}\,a^2=6ax-6\sqrt{3}\,ay$，此为目标函数.

（3）问题转化. 在上述两步的基础上，因此我们可以将蜂窝问题归结于求解目标函数 $z(x,y)=6\sqrt{3}\,a^2=6ax-6\sqrt{3}\,ay$ 在附加条件 $x^2+a^2=y^2$ 下的最大值.

（4）求解极值问题. 利用拉格朗日乘数法

①构造函数 $F(x,y,\lambda)=6\sqrt{3}\,a^2+6ax-6\sqrt{3}\,ay+\lambda(x^2+z^2-y^2)$

②解方程组 $\begin{cases}F_x'=6a+2\lambda x=0\\F_y'=-6\sqrt{3}\,a-2\lambda x=0\\F_\lambda'=x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$，得驻点坐标 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$

由问题本身知最大值一定存在，故必在驻点处取得.

（5）求出菱形角度. 由菱形的两条对角线长可知，一个半角正切为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\tan\angle GB_1C_1=2\sqrt{2}$，故推得菱形的角度为 $70°32'$，$109°28'$.

没想到小小的蜜蜂竟计算得如此准确.

3.2.4　延伸拓展

蜂窝问题是生物现象启发人类的典型例子. 蜂窝的奇特结构不仅引起了数学家的注意，也使建筑学家、材料工艺学家、航天器设计师们得到很大的启发. 我们分别从以下面三个方面进行了举例：①“蜂窝式夹层”结构；②蜂窝移动通信系统；③蜂窝式建筑.

4　结　语

本节课我们主要讲了两部分内容：①拉格朗日乘数法；②拉格朗日乘数法在蜂窝问题中的应用. 从现实生活中的例子——蜂窝问题来引入拉格朗日乘数法；反过来，又利用拉格朗日乘数法给出了蜂窝问题的详细解答. 这种“诱思探究式”的教学方法，能够较好地激发学生的学习兴趣，强化学生的参与意识，提高课堂的教学效率.

参考文献：

[1]　梁乐明，曹俏俏，张宝辉. 微课程设计模式研究：基于国内外微课程的对比分析[J]. 开放教育研究，2013(1)：65-73.

[2]　吴婵. 关于微课对优化高校教学效果的思考 [J]. 高教论坛，2013(10)：17-18.

[3]　同济大学数学系. 高等数学(下册)[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社.

[4]　李心灿. 高等数学应用 205 例[M]. 北京：高等教育出版社，1997.